(1a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x-1}{3x^2+1} = -\dfrac{1}{2}$ olduğunu gösterelim.

$\forall \varepsilon > 0$ için $0 < |x-(-1)| < \delta$ old.da $\left| \dfrac{x-1}{3x^2+1} - \left(\dfrac{-1}{2}\right) \right| < \varepsilon$

o.ş. $\exists \delta : \delta(\varepsilon) > 0$?

$\forall \varepsilon > 0$ için $0 < |x+1| < \delta$ olsun.

$$\left| \frac{x-1}{3x^2+1} + \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{3x^2+2x-1}{2(3x^2+1)} \right| = \frac{|x+1| . |3x-1|}{2(3x^2+1)}$$

$$< \frac{\delta . |3x-1|}{2(3x^2+1)} = \frac{\delta |3x+3-4|}{6x^2} < \frac{\delta(\delta+4)}{6x^2}$$

$|x+1| < \delta < \frac{1}{2}$ alalım. $|x+1| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x+1 < \frac{1}{2} \Rightarrow$

$-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} < x^2 < \frac{9}{4}$ olur. Buradan

$\left(\delta < \frac{1}{2} \Rightarrow \delta^2 < \delta \right)$

$$\left| \frac{x-1}{3x^2+1} + \frac{1}{2} \right| < \frac{\delta^2+4\delta}{6x^2} < \frac{\delta^2+4\delta}{\frac{3}{2}} < \frac{2(\delta+4\delta)}{3}$$ olup

$\varepsilon > 0$ için $\delta = \dfrac{3 . \varepsilon}{10}$ olur. Sonuç olarak $\forall \varepsilon > 0$

için $\delta = \min\left\{ \dfrac{1}{2}, \dfrac{3 . \varepsilon}{10} \right\}$ alınırsa $0 < |x+1| < \delta \Rightarrow$

$\left| \dfrac{x-1}{3x^2+1} + \dfrac{1}{2} \right| < \varepsilon$ olur.

(1b) $f, g : X \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon ve $a \in X'$ olsun.

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = K$: $\forall \varepsilon > 0$ için $0 < |x-a| < \delta_1$ old. da $|f(x) - K| < \varepsilon$ o.ş. $\exists \delta_1(\varepsilon) > 0$ vardır.

(ii) $\lim_{x \to a} g(x) = L$: $\forall \varepsilon > 0$ için $0 < |x-a| < \delta_2$ old. da $|g(x) - L| < \varepsilon$ o.ş. $\exists \delta_2(\varepsilon) > 0$ vardır.

$K < L$ olsun. (i) ve (ii) ifadelerindeki eşitsizlikler her $\varepsilon > 0$ sayısı için yazıldığından $\varepsilon' = \frac{L-K}{2} > 0$ için de yazılabilir. Yani
$0 < |x-a| < \delta_1'$ old. da $|f(x) - K| < \frac{L-K}{2}$ o.ş. $\exists \delta_1' > 0$;
$0 < |x-a| < \delta_2'$ old. da $|g(x) - L| < \frac{L-K}{2}$ o.ş. $\exists \delta_2' > 0$
sayıları vardır. $\delta = \min\{\delta_1', \delta_2'\}$ alınırsa
$0 < |x-a| < \delta$ old. da $|f(x) - K|, |g(x) - L| < \frac{L-K}{2}$
olup $|f(x) - K| < \frac{L-K}{2} \Rightarrow \frac{K-L}{2} + K < f(x) < K + \frac{L-K}{2}$ &

$$|g(x) - L| < \frac{L-K}{2} \Rightarrow \frac{K-L}{2} + L < g(x) < L + \frac{L-K}{2} \Rightarrow$$

$f(x) < \frac{K+L}{2} < g(x)$ yazılır. Yani $\forall x \in \mathring{U}_\delta(a)$ için

$f(x) < g(x)$ dir.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)}{\sqrt{3}-2\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$ belirsizliği olur. $\boxed{x-\frac{\pi}{6}=t}$

alınırsa $x\to\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow t\to 0$ olup

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)}{\sqrt{3}-2\cos x} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{3}-t-\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}-2\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sqrt{3}-2\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{2\left(\cos\frac{\pi}{6}-\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{2\cdot +2\cdot \sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cdot \sin\frac{t}{2}}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2\cdot \sin t/2 \cdot \cos t/2}{2\cdot \sin t/2 \cdot 2\cdot \sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{6}\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos t/2}{2\cdot \sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}} = 1$$

bulunur.

(2b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2-x+1} - \sqrt{x^2-4x+5} = (\infty - \infty) \Rightarrow$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2-x+1} - \sqrt{x^2-4x+5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x^2-x+1)-(x^2-4x+5)}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-4x+5}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{3x-4}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{3x-4}{|x|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{3x-4}{-x\left(\sqrt{1-\underbrace{\cancel{\tfrac{1}{x}}}_{0}+\underbrace{\cancel{\tfrac{1}{x^2}}}_{0}}+\sqrt{1-\underbrace{\cancel{\tfrac{4}{x}}}_{0}+\underbrace{\cancel{\tfrac{5}{x^2}}}_{0}}\right)} = \frac{3}{-2} \text{ olur.}$$

3) $\forall x \in A$ için $\dfrac{1}{1-x} < 2x+1 \Rightarrow 0 < 2x+1-\dfrac{1}{1-x}$

$$\Rightarrow \frac{2x^2-x}{1-x} < 0$$

x		0		$1/2$		1	
$\dfrac{2x^2-x}{1-x}$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$

$\Rightarrow A = \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, \infty)$

$\inf A = 0$, $\sup A$ yoktur.

4) $f(x) = \dfrac{x}{2+\sec x} = \dfrac{x}{2+\frac{1}{\cos x}} = \dfrac{x\cos x}{2\cos x+1}$

$2\cos x + 1 \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x \neq \frac{2\pi}{3} + 2\pi k_1,\ k_1 \in \mathbb{Z}$

$x \neq \frac{4\pi}{3} + 2\pi k_2,\ k_2 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ f fonksiyonunun sürekli olduğu küme

$$\mathbb{R} - \left\{ \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k_1 \mid k_1 \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{4\pi}{3} + 2\pi k_2 \mid k_2 \in \mathbb{Z} \right\} \right\}.$$

5) a) Dizinin tanımından her $n \geq 1$ için $a_n \geq 0$ dır.

$n=1$ için $a_1 = 0 < 1$ doğrudur.

$n=k$ için $a_k < 1$ doğru olsun.

$n=k+1$ için doğruluğunu gösterelim:

$$a_{k+1} = \frac{3a_k+1}{a_k+3} = 3 - \frac{8}{a_k+3} < 3-2 = 1$$

$a_k < 1$ olduğundan $a_k + 3 < 4$

$$-\frac{1}{a_k+3} < -\frac{1}{4}$$

$$-\frac{8}{a_k+3} < -\frac{8}{4} = -2$$

$\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq a_n < 1$ olur.

b) Dizinin sınırlı olduğu (a) da gösterildi.

Monoton olup olmadığına bakalım.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3a_n+1}{a_n+3} - a_n = \frac{1-a_n^2}{a_n+3} > 0$$

$\left(0 \leq a_n < 1 \text{ olduğundan } 1-a_n^2 > 0\right)$ $\Rightarrow a_{n+1} > a_n$

olduğundan (a_n) dizisi artandır.

Artan ve sınırlı olan (a_n) dizisi yakınsaktır.